

Devoir surveillé N°1

Durée: 1h30

Epreuve: Analyse

Date: 29-10-2024

N. B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice : (8 points)

- On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \arccos(\cos(2x))$.
 - Déterminer le domaine de définition D_φ de φ .
 - Etudier la parité et la périodicité de φ .
 - Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie.
 - Simplifier l'expression de $\varphi(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - Déduire la représentation graphique de φ sur D_φ .
- On considère la fonction f définie par $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
 - Déterminer le domaine de définition D_f de f .
 - Etudier la parité de f .
 - Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $f(\tan(t)) = \varphi(t)$.
 - Exprimer alors pour tout $x \in D_f$, $f(x)$ à l'aide de φ et $\arctan$.
 - Déduire de ce qui précède les variations de f sur D_f .
 - Dresser le tableau de variation de f en précisant ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Problème : (12 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction T_n par : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Les fonctions T_n sont appelées les polynômes de Tchebychev.

Partie I

- Déterminer le domaine de définition D de T_n .
- Pour tout $x \in D$, calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$ et $T_2(x)$.
- Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
 - Etudier en fonction de n la parité de T_n .
- Montrer que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
 - Déduire alors que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

5. (a) Montrer que pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$$

(Ind. Utiliser $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$).

- (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer alors $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Partie II

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : (1 - x^2)y''(x) - xy'(x) = 0, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

où $y : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle (E_0) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. (Ind. Poser pour tout $x \in [-1, 1]$, $z(x) = y'(x)$)

2. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation différentielle

$$(E_n) : (1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

- (a) On pose pour tout $\theta \in [0, \pi]$, la fonction $z(\theta) = y(\cos(\theta))$.

Montrer que y est une solution de l'équation différentielle (E_n) si et seulement si z est une solution de l'équation différentielle

$$(F_n) : z''(\theta) + n^2z(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in [0, \pi].$$

- (b) Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle (F_n) .

- (c) Déterminer alors les solutions générales de l'équation différentielle (E_n) .

- (d) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction T_n est l'unique solution de l'équation différentielle (E_n) vérifiant :

$$y(\cos(\frac{\pi}{2n})) = 0 \text{ et } y'(\cos(\frac{\pi}{2n})) = \frac{n}{\sin(\frac{\pi}{2n})}.$$

Bon travail